

1785 Ley de Coulomb

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{x}') \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|^3} d^3x'$$

1 — El campo eléctrico, ley de Coulomb

## 1.1 Introducción

La fuerza electromagnética es una de las cuatro fuerzas fundamentales mediante la cual interactúan todas las partículas que conforman la naturaleza, y radica en una de las propiedades elementales de la materia: la *carga eléctrica*. La carga es el origen de las interacciones electromagnéticas, en completa analogía con la masa que constituye el origen de la fuerza gravitacional. Toda la materia está constituida por partículas cargadas, y la fuerza electromagnética es la que mantiene a los electrones confinados espacialmente en torno a los núcleos para formar átomos, y a su vez, permite que los átomos se mantengan unidos para formar moléculas. A nivel macroscópico, la fuerza electromagnética permite, por ejemplo, que una persona pueda sentarse en una silla, o que un auto pueda permanecer en reposo en una pendiente gracias al roce estático entre las ruedas y la superficie de la calle, ambos ejemplos corresponden a una manifestación macroscópica de fuerzas electromagnéticas. Las interacciones electromagnéticas nos permiten además observar el mundo que nos rodea, pues el hecho de que podamos ver se debe a que nuestros ojos son capaces de detectar (de manera muy sensible) ciertas variaciones temporales de campos electromagnéticos (lo que llamamos luz).

## 1.2 La carga eléctrica

Los objetos que componen la materia (electrón, protón, neutrón) poseen una propiedad fundamental llamada carga eléctrica, análoga al rol que juega la masa en la interacción gravitacional. Al estudiar la interacción entre objetos cargados se llegó a la conclusión de que existen 2 tipos de cargas: positivas y negativas. En efecto, y en contraste con la fuerza gravitacional, la fuerza entre 2 objetos cargados puede ser repulsiva o atractiva dependiendo del signo de ambas cargas en cuestión.

En el sistema internacional (S.I.) la unidad de carga es el coulomb (C), y la carga fundamental es aquella del electrón, dada por:

$$q_e = -e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

La carga de un protón posee la misma magnitud que aquella del electrón, pero signo contrario, es decir  $q_p = +e = +1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ . Por último, el neutrón es una partícula de carga nula. En consecuencia, la carga  $Q$  de todo objeto macroscópico está cuantificada (es decir, solo puede tener ciertos valores discretos) ya que éste está necesariamente compuesto de un número entero de electrones y protones:

$$Q = ne \quad n \in \mathbb{Z}$$

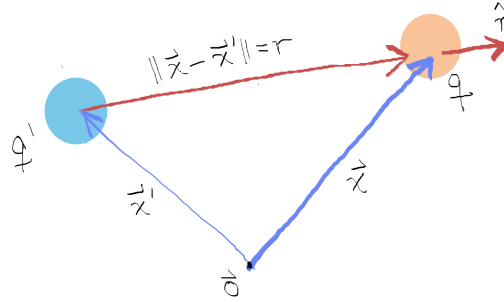
## 1.3 Fuerza entre 2 cargas puntuales: ley de Coulomb (1785)

Lo primero que haremos será responder la pregunta más básica: ¿cómo interactúan dos partículas cargadas?. Para ello, consideremos un sistema de dos cargas puntuales  $q$  y  $q'$ , en un referencial en donde ambas están en **reposo**, separadas por una distancia  $r$  en el vacío. La fuerza de interacción electrostática (estática pues las cargas no se encuentran en movimiento relativo) fue estudiada experimentalmente por el físico francés Charles Augustin de Coulomb. físico francés)

**Definición 1.3.1 — Ley de Coulomb (1785).** La fuerza que ejerce una carga  $q'$  situada en

$\vec{x}'$  sobre otra carga  $q$  ubicada en  $\vec{x}$  está dada por la ley de Coulomb :

$$\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|^3} (\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \hat{r} \quad (1.1)$$



Es decir, la fuerza electrostática es una fuerza central, cuya magnitud solo depende de la distancia  $r = \|\vec{x} - \vec{x}'\|$  y cuya dirección coincide con la dirección que une ambas cargas  $\hat{r} = (\vec{x} - \vec{x}') / \|\vec{x} - \vec{x}'\|$ . Note que el sentido de la fuerza sobre  $q$  depende del signo de  $qq'$ . La constante de proporcionalidad (escrita como  $1/(4\pi\epsilon_0)$  por razones históricas) en la ley de Coulomb vale:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.9875 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$$

Donde  $\epsilon_0$  se conoce como la **permitividad del vacío**:

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2\text{m}^{-2}\text{N}^{-1}.$$

Es claro que la fuerza sobre  $q'$  debida a la presencia de  $q$  está dada por  $\vec{F}_{q'} = -\vec{F}_q$ , como debe ser por la tercera ley de Newton. Nótese que este simple sistema de 2 cargas no puede permanecer en reposo a menos que otras fuerzas presentes las mantengan en su lugar. Si esto último no ocurre, las 2 cargas se encontrarán en movimiento relativo, y a la ley de Coulomb habrá que agregar un término que tome en cuenta dicho movimiento. Más adelante veremos que esto dará origen a una nueva manifestación de la interacción electromagnética, que llamamos magnetismo.

Es un hecho empírico que las fuerzas electrostáticas pueden ser atractivas o repulsivas (ver Fig. 1.1), dependiendo del tipo de cargas en cuestión. El sentido de la fuerza está determinado únicamente por el producto de las cargas: si ambas poseen el mismo signo, la fuerza será repulsiva, mientras que si son de signo opuesto, la fuerza será atractiva.

En consecuencia, el signo que asignamos a los 2 tipos de carga existente es absolutamente arbitrario. Por convención histórica, la carga del electrón es considerada negativa ( $q_e = -e$ ), y la del protón positiva ( $q_p = +e$ ). Perfectamente se podría invertir el signo de ambas cargas, siendo la fuerza entre ambas partículas (y en consecuencia toda observación experimental) absolutamente insensible a este cambio.

El dispositivo utilizado por Coulomb consiste en una balanza de torsión, la cual es capaz de detectar fuerzas con suficiente precisión. Dos esferas metálicas se encuentran unidas mediante una varilla aislante, la cual se encuentra suspendida gracias a una fibra. Una esfera de carga positiva se acerca a una distancia  $r$  de una de las esferas de la balanza. Si esta última también está cargada positivamente, las dos esferas se repelen, y en consecuencia se produce una rotación

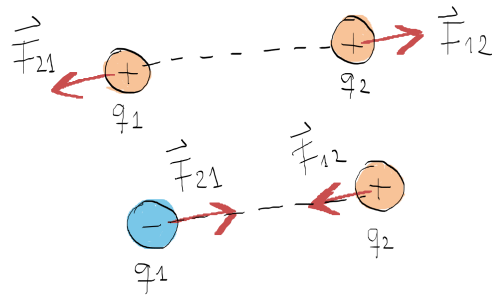
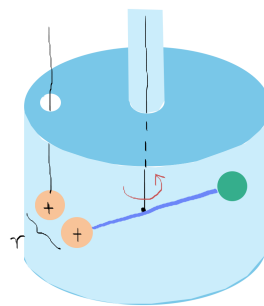
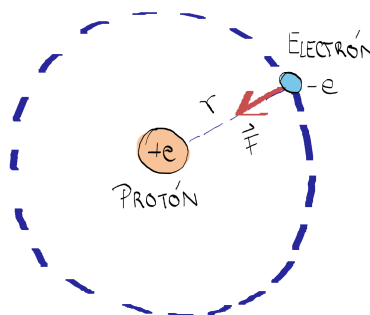


Figura 1.1: A diferencia de lo que ocurre con la masa (un solo signo permitido), las cargas de dos partículas no siempre poseen el mismo signo. Cargas de distinto signo se atraen, cargas de igual signo se repelen.

de la varilla y una torsión de la fibra de suspensión en un ángulo proporcional a la fuerza experimentada por las cargas.



■ **Ejemplo 1.1 — La fuerza eléctrica domina a nivel atómico.** La fuerza electrostática entre 2 partículas en un átomo es muchísimo más intensa que la fuerza gravitacional. Como ejemplo, consideremos el átomo de hidrógeno, formado por la interacción entre un electrón (carga  $-e$ ) y un protón (carga  $+e$ ), cuya separación es una distancia  $r$ .



La razón entre las magnitudes de las fuerzas eléctrica y gravitacional es:

$$\frac{|F_e|}{|F_g|} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \times \frac{r^2}{Gm_em_p}$$

donde  $G \approx 6,7 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$  es la constante de gravitación universal. Las masas del electrón y del protón son, respectivamente,  $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$  y  $m_p \approx 2000 m_e$ . Esto da:

$$\frac{|F_e|}{|F_g|} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 G m_e m_p} \approx 2 \times 10^{39}$$

La magnitud de la interacción electrostática es en este caso 39 órdenes de magnitud más grande que la interacción gravitacional; en un sistema atómico predomina la interacción eléctrica. Sin embargo, es sabido que el universo a gran escala se rige por la fuerza de gravitación, en efecto, es ésta y no la fuerza electrostática la que determina el movimiento de la tierra en torno al Sol. La razón es que la materia a gran escala tiende a ser eléctricamente neutra. Por ejemplo, el átomo de hidrógeno visto desde distancias mucho más grandes que la separación entre el electrón y el protón es eléctricamente neutro. Dado que cargas de signo contrario se atraen, éstas terminan por permanecer unidas para formar la materia, generando un efecto de apantallamiento de las interacciones electrostáticas a gran escala.

■

### 1.3.1 ¿Por qué existen objetos cargados?

Los átomos en su estado estable son eléctricamente neutros, el núcleo posee el mismo número de protones que de electrones que se encuentran unidos a éste. De esta forma, en principio todo objeto macroscópico es neutro. Sin embargo, existen mecanismos de transferencias de cargas que pueden provocar un desbalance en ciertos objetos. Por ejemplo, la electricidad estática se produce cuando ciertos materiales se frotan uno contra el otro, como lana contra plástico o las suelas de zapatos contra la alfombra, donde el proceso de frotamiento causa que se retiren los electrones de la superficie de un material y se reubiquen en la superficie del otro material que ofrece niveles energéticos más favorables. Esto genera un desbalance eléctrico en cada objeto, quedando ambos con una carga neta no nula. También se puede cargar un conductor mediante el fenómeno de inducción, que será estudiado en detalle en la sección 4.3.1. Naturalmente, Coulomb estableció su ley estudiando la fuerza resultante entre objetos macroscópicos cargados, y no entre 2 partículas fundamentales en el vacío!.

### 1.3.2 Aislantes y conductores

Se puede clasificar (muy gruesamente) la materia en dos categorías: los aislantes (o dieléctricos) son aquellos en donde las cargas no pueden moverse fácilmente, ya que los electrones se encuentran fuertemente ligados a los átomos, la transferencia de carga hacia o desde un objeto aislante no es tan favorable (aunque posible). Ejemplos clásicos son el vidrio y los plásticos. Los conductores (típicamente los metales) en cambio, son aquellos en donde los electrones pueden moverse libremente a través del material, siendo fácil agregar o quitar cargas a éste tipo de objetos.

Al acercar un aislante cargado (por ejemplo, por frotamiento previo) a un conductor, en éste último las cargas en su superficie se distribuirán debido a la presencia de la carga en el aislante. Como ejemplo, si el aislante en cuestión está cargado positivamente, debido a la atracción coulombiana, cargas negativas en el conductor se acumularán en las regiones más cercanas al aislante, dejando un déficit de cargas negativas (y por lo tanto una carga positiva) en el otro extremo del conductor. A éste fenómeno se le llama inducción por polarización (ver Fig. 1.2.)

Si bien la carga total de la esfera sigue siendo nula, ésta no está distribuida uniformemente en su superficie, dejando zonas con carga positiva y negativa.

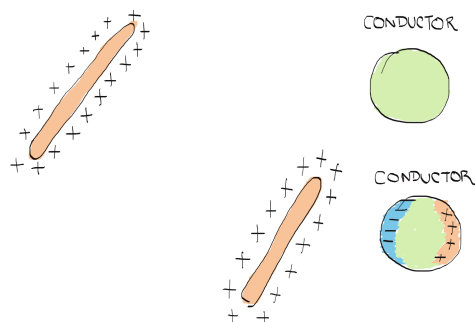


Figura 1.2: Arriba: una varilla cargada positivamente se acerca lentamente a una esfera conductora eléctricamente neutra. Abajo: cuando ambos objetos están suficientemente cerca, los electrones en el metal serán atraídos hacia la varilla, dejando en la zona opuesta a ésta un déficit de electrones (carga positiva).

### 1.3.3 ¿Cómo detectar objetos cargados?.

El electroscope es un instrumento capaz de determinar si un objeto se encuentra eléctricamente cargado. En la Fig. 1.3 se muestra una esfera conductora que se encuentra conectada mediante una barra (igualmente conductora) a dos láminas muy delgadas. Al acercar un objeto electrizado a la esfera, esta última se polariza por inducción (Ver 4.3.1 para una explicación de este fenómeno), transmitiendo hacia las láminas una carga de igual signo a la del objeto que se desea estudiar. Esta carga se reparte igualmente sobre ambas láminas, y como cargas de igual signo se repelen, la fuerza electrostática provocará una separación de ambas láminas, siendo esta separación una medida de la cantidad de carga que han recibido.

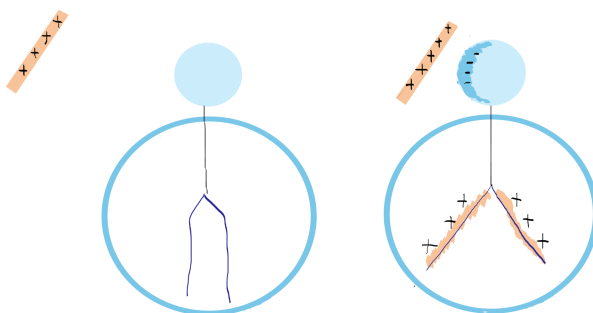
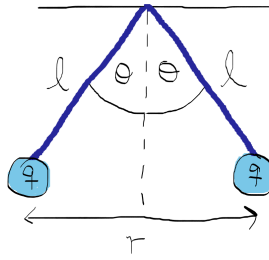


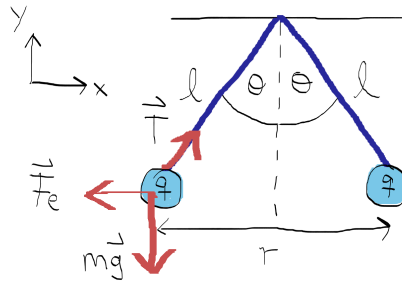
Figura 1.3: Una esfera conductora se encuentra conectada a 2 láminas delgadas (igualmente conductoras). Al acercar una varilla cargada a la esfera, por inducción en la parte superior de la esfera se concentra una carga de signo opuesto. Esto implica que carga de igual signo que la de la varilla se acumula en ambas láminas, que por repulsión coulombiana se separan.

■ **Ejemplo 1.2 — Funcionamiento de un electroscope.** Consideremos dos varillas de largo  $l$ , masa  $m$  (supondremos que la masa de cada una se encuentra concentrada en el extremo, por simplicidad) que han sido cargadas con una carga  $q$ . Ambas forman un ángulo  $\vartheta$  con el eje vertical, como se muestra en la figura siguiente. Calcule el módulo de la carga  $q$ . Es posible determinar el signo de ésta?. Suponiendo que  $l = 1$  cm,  $m = 0.5$  kg, y que la precisión en la medida de  $\vartheta$  es de  $1^\circ$ , cuál es la mínima carga que se puede medir con este electroscope?.

**Solución**



Debido a la simetría del problema, bastará con el análisis de fuerzas para una de las cargas. Las tres fuerzas presentes son: la fuerza de repulsión (cargas de mismo signo) electrostática  $F_e$ , la tensión sobre la cuerda  $T$ , y la fuerza gravitacional  $mg$ .



De la segunda ley de Newton para la carga de la izquierda, se tiene:

$$F_x = T \sin \vartheta - F_e = ma_x$$

$$F_y = T \cos \vartheta - mg = ma_y$$

Como el sistema se encuentra en equilibrio,  $a_x = a_y = 0$ , y la primera ecuación equivale a

$$T \sin \vartheta = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

donde  $r$  es la separación entre las 2 cargas. La relación entre  $r$  y  $\vartheta$  es  $r = 2l \sin \vartheta$ . Luego, se tiene:

$$q^2 = 4\pi\epsilon_0 T \sin \vartheta r^2 = 16l^2 \pi\epsilon_0 T \sin^3 \vartheta$$

O equivalentemente,

$$q = \pm 4l \sin \vartheta \sqrt{\pi\epsilon_0 T \sin \vartheta}$$

Del equilibrio de fuerzas para el eje vertical obtenemos:

$$T = \frac{mg}{\cos \theta}$$

Con lo que finalmente :

$$|q| = 4l \sin \vartheta \sqrt{\pi\epsilon_0 mg \tan \vartheta}$$

Siendo el signo de la carga imposible de determinar conociendo únicamente  $\vartheta$ . Evaluando numéricamente,  $l = 0.01$  m,  $m = 0.5$  kg, y  $\vartheta = 1^\circ$ , se tiene

$$|q_{\min}| \sim 10^{-9} \text{ C}$$

■

## 1.4 Fuerza entre más de 2 cargas: principio de superposición

La ley de Coulomb describe la interacción entre 2 cargas puntuales. Resulta de interés estudiar qué sucede cuando hay más de dos cargas presentes.

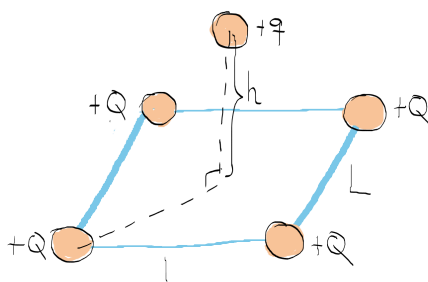
**Definición 1.4.1 — Principio de superposición.** Supongamos que existen  $N$  cargas  $q_j$  con  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ , y que la posición de la  $j$ -ésima carga es  $\vec{x}_j$ . Al colocar una carga  $q$  en la posición  $\vec{x}$ , la fuerza sobre  $q$  está dada por el principio de superposición:

$$\vec{F}_q = \sum_{j=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_j}{\|\vec{x} - \vec{x}_j\|^3} (\vec{x} - \vec{x}_j)$$

Es decir, la suma vectorial de cada fuerza por separado. El principio de superposición sugiere entonces que la fuerza entre 2 cargas es independiente de la presencia de otras cargas. El hecho de que esta ley se verifique experimentalmente permitió determinar la ley de Coulomb (válida entre 2 cargas puntuales) a partir del estudio de la fuerza entre dos objetos macroscópicos cargados en una balanza de torsión (donde hay una gran cantidad de cargas elementales involucradas!). En efecto, la fuerza entre 2 partículas elementales o entre 2 objetos macroscópicos muy distantes (la distancia debe ser mucho mayor al tamaño característico de ambos) sigue la misma ley en  $1/r^2$ .

■ **Ejemplo 1.3 — Superposición de fuerzas.** La figura muestra un cuadrado de largo  $L$ , formado por cuatro cargas positivas iguales de magnitud  $Q$  en un plano horizontal. Una carga positiva  $q$  y de masa  $m$  se coloca a una altura  $h$  por encima de centro del cuadrado. Se pide mostrar que la carga  $q$  estará en el equilibrio si:

$$qQ = \frac{mg\pi\epsilon_0}{h} \left( h^2 + \frac{L^2}{2} \right)^{3/2}$$

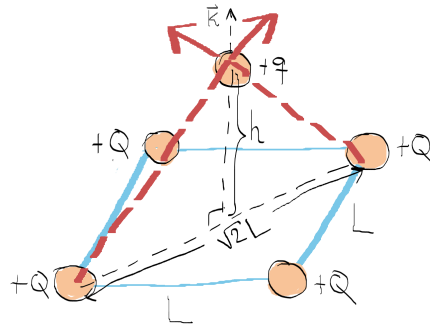


### Solución

Este problema se puede resolver de forma inmediata utilizando el principio de superposición. Consideremos por el momento la fuerza sobre  $q$  que ejercen 2 cargas en esquinas opuestas, como se muestra en la figura. Las componentes de ambas fuerzas según el eje vertical se suman, mientras que en el plano perpendicular a  $\hat{k}$  ambas se anulan.

La fuerza eléctrica sobre la carga  $q$  será entonces:





$$\vec{F}_q = 2 \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin \vartheta \hat{k}$$

Donde  $R = \sqrt{h^2 + \frac{L^2}{2}}$  y  $\sin \vartheta = \frac{h}{\sqrt{h^2 + L^2/2}}$ , de forma que

$$\vec{F}_q = \frac{qQh}{2\pi\epsilon_0} \left\{ h^2 + \frac{L^2}{2} \right\}^{-3/2} \hat{k}$$

Lo mismo ocurrirá para las otras dos cargas restantes, y la fuerza total será:

$$\vec{F}_q = \frac{qQh}{\pi\epsilon_0} \left\{ h^2 + \frac{L^2}{2} \right\}^{-3/2} \hat{k}$$

Esta fuerza debe ser contrarrestada por el peso de la carga  $q$ . El equilibrio de fuerzas ocurrirá cuando  $h$  es tal que  $F_q = mg$ , esto es:

$$qQ = \frac{mg\pi\epsilon_0}{h} \left( h^2 + \frac{L^2}{2} \right)^{3/2}$$

■

## 1.5 Campo Eléctrico

La fuerza electrostática, al igual que la fuerza gravitacional, es una fuerza que actúa a distancia. Supongamos que se tienen 2 cargas puntuales,  $q$  y  $q_0$ , donde la posición de  $q$  es fija. Podemos medir la fuerza que ejerce  $q$  sobre  $q_0$  a medida que esta última es colocada en diferentes lugares del espacio. En cada posición donde se ubique  $q_0$ , ésta sentirá una determinada fuerza. En este sentido, podemos decir que la carga  $q$  genera algo en todo el espacio que es independiente de si colocamos o no la carga  $q_0$ . Se dice que una carga eléctrica genera un **campo eléctrico** (matemáticamente descrito por un campo vectorial) en todo el espacio, el cual es capaz de actuar sobre otras cargas. Bajo este punto de vista, es el campo eléctrico quien transmite la fuerza electrostática.

**Definición 1.5.1 — Campo eléctrico.** El campo eléctrico  $\vec{E}$  en un punto  $\vec{x}$  se define formalmente como la fuerza que experimenta una carga puntual  $q_0$  en  $\vec{x}$  dividida por  $q_0$ :

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\vec{F}_{q_0}(\vec{x})}{q_0}$$

La unidad de  $\vec{E}$  es N/m. De esta forma, el campo eléctrico es independiente de la carga  $q_0$ . A modo de ejemplo, en la figura siguiente se ilustra el campo eléctrico  $\vec{E}$  generado por una carga negativa a una distancia  $r$  de ésta. Al colocar una carga  $q_0$  en dicha posición, ésta sentirá una

fuerza  $\vec{F} = q_0 \vec{E}$ . El signo de la fuerza estará dado por el signo de  $\vec{E}$  y de  $q_0$ .

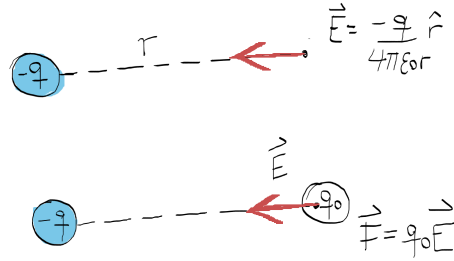


Figura 1.4: En la figura se muestra el campo generado por una carga negativa (en azul). La fuerza sobre una carga  $q_0$  es simplemente  $q_0 \vec{E}$  (en este ejemplo,  $q_0 > 0$ ).

Bajo esta nueva perspectiva, decimos entonces que las cargas crean un campo eléctrico. Por otra parte, cuando una carga  $q_0$  se encuentra en una región donde existe un campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{x})$ , la fuerza sobre  $q_0$  es  $\vec{F}_{q_0} = q_0 \vec{E}(\vec{x})$ . Usando la definición de campo Eléctrico y la ley de Coulomb, se obtiene que el campo eléctrico a una distancia  $r$  de una carga puntual  $q$  está dado por:

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (1.2)$$

donde  $\hat{r}$  es la dirección radial cuyo origen se encuentra en la carga  $q$ . En la figura siguiente se muestra separadamente el campo eléctrico generado por una carga puntual positiva y negativa en un plano que intersecta a las cargas.

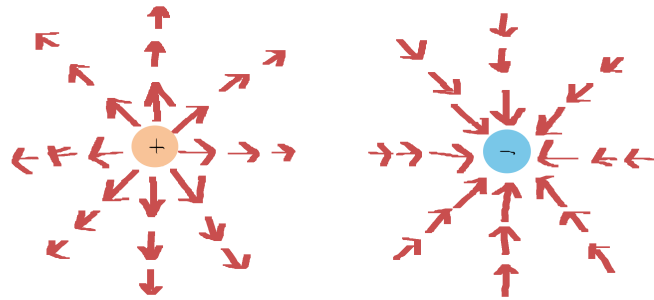


Figura 1.5: Representación gráfica del campo vectorial  $\vec{E}$  para una carga positiva (izquierda) y negativa (derecha).

Por construcción, el principio de superposición es también válido para el campo eléctrico, de forma que el campo en  $\vec{x}$  generado por una distribución discreta de  $N$  cargas puntuales ubicadas en  $\vec{x}_j$ , con  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ , se puede escribir como:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{\|\vec{x} - \vec{x}_j\|^3} (\vec{x} - \vec{x}_j)$$

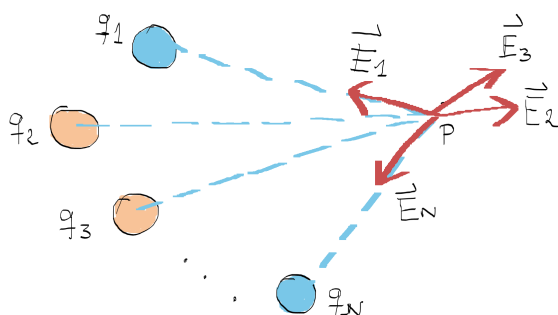
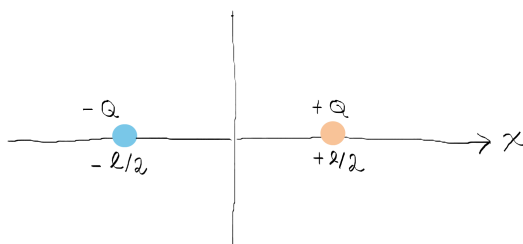


Figura 1.6: El principio de superposición establece que el campo eléctrico en un punto  $P$  será la suma vectorial de los campos creados por todas las cargas existentes.

La ley de Coulomb y el principio de superposición son las leyes empíricas **fundamentales** de la Electrostática.

■ **Ejemplo 1.4 — Campo de un dipolo.** Una carga  $-Q$  está ubicada en  $x = -l/2$  y una carga  $+Q$  en  $x = l/2$ . Calcular el campo eléctrico en el eje  $x$ , en todo punto tal que  $x > l/2$ . Qué ocurre cuando  $x \gg l$ ?



### Solución

Por el principio de superposición, se obtiene

$$\vec{E}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{(x-l/2)^2} - \frac{Q}{(x+l/2)^2} \right) \hat{i}$$

En el límite cuando  $x \gg l$ , podemos escribir

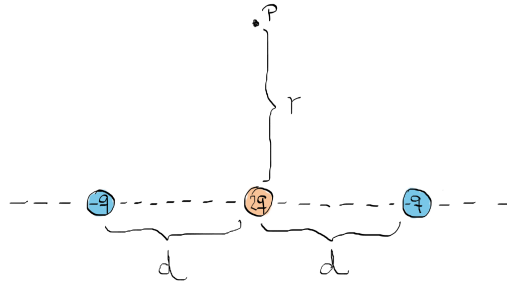
$$(1 \pm l/2)^{-2} \approx 1 \mp l/x$$

de forma que

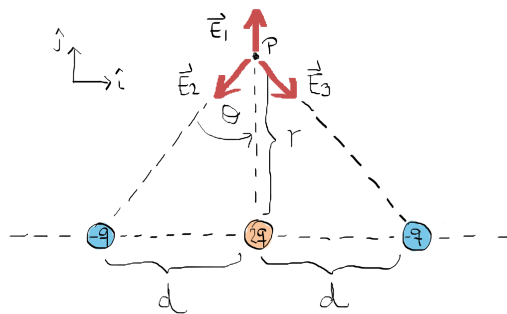
$$\vec{E}(x) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2} (1 + l/x - 1 + l/x) \hat{i} = \frac{2lQ}{4\pi\epsilon_0 x^2} \hat{i}$$

Vemos que a grandes distancias, el campo generado por un dipolo decae como  $1/r^2$ , debido al apantallamiento de ambas cargas. ■

■ **Ejemplo 1.5 — Campo de un cuadrupolo.** Consideremos la distribución de cargas puntuales de la figura. La idea es calcular el campo eléctrico en un punto  $P$  sobre el eje que pasa por la carga  $+2q$ . ¿cómo varía la magnitud del campo eléctrico con la distancia  $r$  cuando  $r \gg d$ ?

**Solución**

a) El campo eléctrico en  $P$  puede ser obtenido utilizando el principio de superposición.



El campo generado en  $P$  por la carga  $2q$  es

$$\vec{E}_1 = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{j}$$

donde se ha definido el eje  $\hat{j}$  como el eje vertical en el plano de la figura. Es clara por la simetría del problema que la superposición de los campos  $\vec{E}_2 + \vec{E}_3$  generará un campo resultante con componente únicamente según  $\hat{j}$ , dado por

$$\vec{E}_2 + \vec{E}_3 = -2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(r^2 + d^2)} \cos \vartheta \hat{j}$$

donde  $\vartheta$  es el ángulo que forma  $\vec{E}_2$  ( y  $\vec{E}_3$ ) con el eje  $\hat{j}$ . Se tiene  $\cos \vartheta = \frac{r}{\sqrt{r^2 + d^2}}$ , y entonces

$$\vec{E}_2 + \vec{E}_3 = -\frac{qr}{2\pi\epsilon_0 (r^2 + d^2)^{3/2}} \hat{j}$$

Así, la superposición dará un campo total igual a

$$\vec{E}(P) = \left( \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{qr}{2\pi\epsilon_0 (r^2 + d^2)^{3/2}} \right) \hat{j} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{r}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \right) \hat{j}$$

b) Para analizar el límite  $r \gg d$ , reescribimos el campo eléctrico de la siguiente manera

$$\vec{E}(P) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r^2} \left( 1 - \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{d}{r}\right)^2\right)^{3/2}} \right) \hat{j}$$

Ahora, utilizando la expansión de Taylor a primer orden  $(1+x)^n \approx 1+nx$  ( $x \ll 1$ ), se tiene

$$\left(1 + \left(\frac{d}{r}\right)^2\right)^{-3/2} \approx 1 - \frac{3}{2} \frac{d^2}{r^2}$$

y entonces

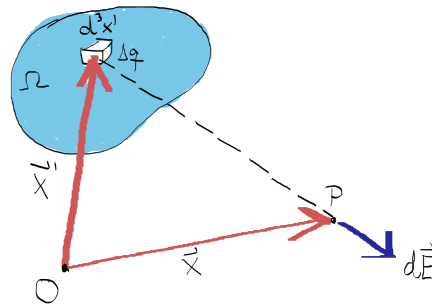
$$\vec{E}(P) \approx \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{3}{2r^2} \frac{d^2}{r^2} \right) \hat{j} \approx \frac{3qd^2}{4\pi\epsilon_0 r^4} \hat{j}$$

Notar que cuando la distancia es grande en comparación a la separación entre las cargas ( $r \gg d$ ), esta distribución de carga genera un campo que decae como  $1/r^4$  (más rápido que el de una carga puntual y que el de un dipolo), debido a un efecto de apantallamiento (las 2 cargas  $-q$  contrarrestan a la carga  $+2q$ ).

■

### 1.5.1 Distribuciones continuas de carga - Integrales de Coulomb

El cálculo de los campos eléctricos se puede extender para el caso en que se tiene un medio continuo cargado. Esto quiere decir que dado un determinado objeto de volumen  $\Omega$ , uno puede considerar un sub-volumen  $d^3x'$  alrededor de la posición  $\vec{x}' \in \Omega$  y de tamaño despreciable frente al volumen del objeto, es decir,  $d^3x' \ll \Omega$ . Al interior de  $d^3x'$  puede existir una carga total  $dq(\vec{x}')$  constituida por una gran cantidad de cargas puntuales distribuidas de forma inhomogénea espacialmente sobre  $d^3x'$ . La idea es aproximar  $d^3x'$  por un volumen cargado de forma homogénea, es decir, le asociamos una cierta densidad de carga por unidad de volumen  $\rho(\vec{x}')$  (C/ m<sup>3</sup>).



En otras palabras,  $\rho(\vec{x}')$  representa un valor medio de la densidad de carga existente en  $d^3x'$

$$dq(\vec{x}') = d^3x' \rho(\vec{x}')$$

Como esta es una carga infinitesimal (en comparación al volumen total  $\Omega$ ), el campo que genera en un punto  $\vec{x}$  será aproximadamente el de una carga puntual:

$$d\vec{E}(\vec{x}') = \frac{d^3x' \rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|^3}$$

Para obtener el campo generado por toda la distribución de carga, basta con sumar sobre  $\Omega$  las contribuciones individuales de cada volumen elemental, y en el límite  $d^3x' \rightarrow 0$  se obtiene la fórmula integral:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|^3} (\vec{x} - \vec{x}') \quad (1.3)$$

En el caso en que se tiene una distribución bidimensional (una superficie  $S$  cargada), en donde para cada  $\vec{x}' \in S$  se tiene una densidad superficial de carga (que denotaremos  $\sigma$  para diferenciarla de una densidad volumétrica), se tiene

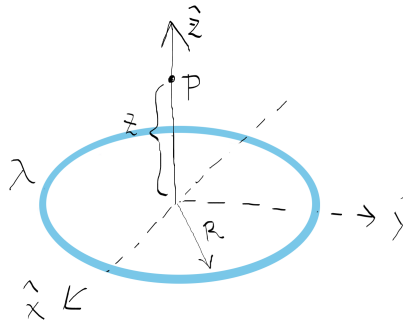
$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S ds' \frac{\sigma(\vec{x}')}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|^3} (\vec{x} - \vec{x}')$$

De igual forma, para una distribución unidimensional de carga sobre una curva  $\Gamma$ , (cuya densidad lineal de carga llamamos  $\lambda$ ) el campo en  $\vec{x}$  está dado por

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma} dx' \frac{\lambda(\vec{x}')}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|^3} (\vec{x} - \vec{x}')$$

Éstas son las integrales de Coulomb y son una extensión del principio de superposición desde el caso de una distribución discreta de cargas, al caso de un medio continuo cargado.

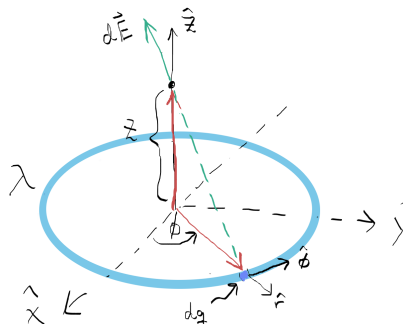
■ **Ejemplo 1.6 — Anillo cargado uniformemente.** Consideremos un anillo de radio  $R$  con densidad lineal de carga constante y dada por  $\lambda$ . El objetivo es calcular el campo eléctrico generado por esta distribución de carga en un punto sobre el eje de simetría, a distancia  $z$  del centro del anillo. ¿Para qué valor de  $z$  la magnitud del campo es máxima?



### Solución

Un elemento diferencial de longitud sobre el anillo está dado por  $dl = R d\phi$ , donde  $\phi$  es el ángulo polar. La carga asociada es  $dq = \lambda dl = \lambda R d\phi$ , de forma que el campo eléctrico en un punto  $\vec{x}$  debido a esta carga infinitesimal está dado por la integral de Coulomb:

$$d\vec{E}(\vec{x}) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|^3} = \frac{d\phi R \lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|^3}$$



donde  $\vec{x}'$  es la posición del elemento de carga, en este caso  $\vec{x}' = R\hat{r}(\phi) = R(\cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j})$ , de forma que el campo total en  $\vec{x}$  se obtiene integrando sobre todo el anillo :

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{R\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\vec{x} - R\hat{r}(\phi)}{\|\vec{x} - R\hat{r}(\phi)\|^3}$$

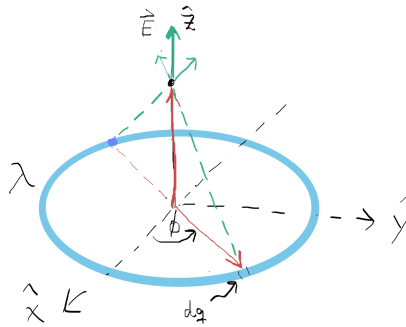
ahora, se busca el campo en un punto sobre el eje simetría del anillo, a distancia  $z$  del origen, de forma que  $\vec{x} = z\hat{k}$  y queda finalmente

$$\vec{E}(z\hat{k}) = \frac{R\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{z\hat{k} - R\hat{r}(\phi)}{\|z\hat{k} - R\hat{r}(\phi)\|^3}$$

por supuesto que  $\|z\hat{k} - R\hat{r}(\phi)\| = (z^2 + R^2)^{1/2}$

$$\vec{E}(z\hat{k}) = \frac{R\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{z\hat{k} - R\cos\phi\hat{i} - R\sin\phi\hat{j}}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

De estas tres integrales (en  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$ ), la única que no es nula es la integral según  $\hat{k}$ . Esto es fácil de anticipar apelando a la simetría de la distribución de carga, en efecto, todo elemento de carga en el anillo posee un simétrico opuesto, de forma que la suma de ambos campos sobre el eje  $z$  es un vector según  $\hat{k}$



$$\vec{E}(z\hat{k}) = \frac{Rz\lambda\hat{k}}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{2\pi R\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \right) \hat{k}$$

ésto se puede reescribir considerando que  $Q = 2\pi R\lambda$  es la carga total del anillo

$$\vec{E}(z\hat{k}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \right) \hat{k}$$

La magnitud del campo eléctrico es máxima cuando

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \right) = 0$$

es decir, para  $z = R/\sqrt{2}$ .

**Nota**

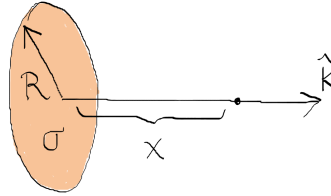
1. La dependencia del campo eléctrico en la distancia  $z$  al centro del anillo no es tan simple como  $1/z^2$ . A pesar de que el cálculo considera una integración sobre cargas puntuales, la superposición vectorial tiene como consecuencia una dependencia más compleja que la de la ley de Coulomb.
2. En  $z = 0$ ,  $\vec{E} = \vec{0}$ , debido a que existe una compensación entre las cargas diametralmente opuestas.
3. Si  $z$  es suficientemente grande en comparación con las dimensiones del anillo ( $z \gg R$ ), entonces a orden cero en  $(R/z)$

$$\vec{E}(z\hat{k}) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \hat{k}$$

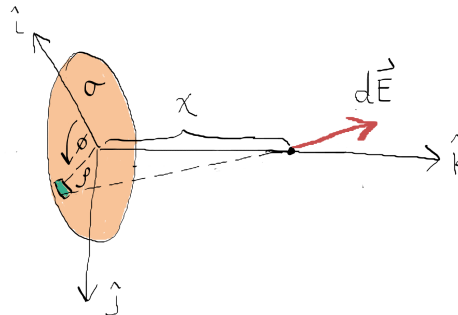
que corresponde al campo a distancia  $z$  de una carga puntual  $Q$ .

■

■ **Ejemplo 1.7 — Disco cargado uniformemente.** Considere un disco de radio  $R$  uniformemente cargado con densidad superficial  $\sigma$ . Calcule el campo eléctrico en el eje a distancia  $x$  del centro del disco. Calcule el campo en el límite  $R \rightarrow \infty$  (caso de un plano infinito de carga).

**Solución**

Consideremos un elemento de superficie en el disco en la posición  $\vec{x}' = r\hat{r}(\phi)$ . El área asociada es  $d^2x' = r dr d\phi$ , y el diferencial de carga es entonces  $dq = \sigma r dr d\phi$ .



El campo eléctrico generado por este elemento de superficie en  $\vec{x} = x\hat{k}$  está dado por:

$$d\vec{E}(x\hat{k}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(\vec{x} - \vec{x}')}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|^3} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{r dr d\phi (x\hat{k} - r\hat{r}(\phi))}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$



Así, el campo eléctrico total será la contribución de todos los elementos de superficie en el disco:

$$\vec{E}(x\hat{k}) = \frac{\sigma x}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R dr \frac{r}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \hat{k} - \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi (\cos\phi \hat{i} + \sin\phi \hat{j}) \int_0^R dr \frac{r^2}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

La integral según  $\hat{j}$  es 0, y esto se puede mostrar calculándola directamente o usando el argumento de simetría del disco, ya que es fácil ver que el campo eléctrico resultante en el eje solo tendrá componente en  $\hat{k}$ . Sea  $u = r^2 + x^2$ , luego  $du = 2rdr$ , con esto:

$$\vec{E}(x\hat{k}) = 2\pi \frac{\sigma x}{4\pi\epsilon_0} \int_{x^2}^{R^2+x^2} \frac{du}{2u^{3/2}} \hat{k}$$

Donde el factor  $2\pi$  resulta de integrar  $d\phi$  entre 0 y  $2\pi$ . Finalmente:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x\hat{k}) &= \frac{\sigma x}{4\epsilon_0} \left\{ -2u^{-1/2} \right\}_{x^2}^{x^2+R^2} \hat{k} = \left( -\frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}} + \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{1}{x} \right) \hat{k} = \frac{-\sigma x + \sigma \sqrt{R^2+x^2}}{2\epsilon_0 \sqrt{R^2+x^2}} \hat{k} \\ \vec{E}(x\hat{k}) &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} \right) \hat{k} \end{aligned}$$

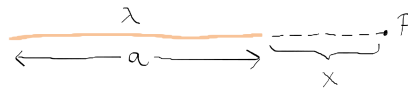
Notar que si  $R \rightarrow \infty$  (equivalentemente,  $x \rightarrow 0$ ), se obtiene el campo generado por un plano infinito

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \vec{E}(x\hat{k}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k}$$

El campo no depende entonces de la distancia  $x$  al plano. Más aún, en este caso el eje  $\hat{k}$  es equivalente a cualquier eje perpendicular al plano. Es decir, la magnitud del campo eléctrico de un plano infinito es uniforme en todo el espacio.

■

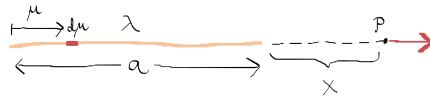
■ **Ejemplo 1.8 — Campo en el eje de una línea cargada.** Se tiene una línea homogénea de carga con densidad lineal  $\lambda$ , y de longitud finita  $a$ . Calcular el campo eléctrico en el punto  $P$  a distancia  $x$  del extremo.



### Solución

Tomamos un pequeño elemento  $d\mu$  de la línea de carga, situado a una distancia  $\mu$  del extremo izquierdo, y obtenemos el campo eléctrico en el punto  $P$  debido a este elemento diferencial

$$d\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\mu}{(a+x-\mu)^2} \hat{i}$$



Y el campo eléctrico total se obtiene integrando para toda la línea de carga. Esto es

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{\lambda d\mu}{(a+x-\mu)^2} \hat{i}$$

Sea  $z = a + x - \mu$ , así,  $dz = -d\mu$  y el campo queda

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{a+x}^x \frac{dz}{z^2} \hat{i} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{z} \Big|_{a+x}^x \hat{i} = \left( \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 (a+x)} \right) \hat{i} \\ \vec{E} &= \frac{\lambda(x+a) - \lambda x}{4\pi\epsilon_0 x(x+a)} \hat{i} = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0 x(x+a)} \hat{i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x(x+a)} \hat{i} \end{aligned}$$

Con  $Q$  la carga total de la línea. Notar que si  $x \gg a$ , a orden cero en  $a/x$

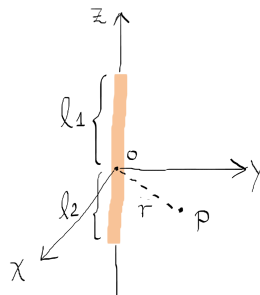
$$\vec{E} \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \hat{i}$$

que concuerda con el campo de una carga puntual.

■

■ **Ejemplo 1.9 — Campo fuera del eje de una línea de carga.** Se tiene una distribución rectilínea de carga de densidad  $\lambda$  homogénea. Un punto  $P$  está a una distancia  $r$  de la distribución, y su proyección sobre el eje de la línea de carga está a las distancias  $l_1$  y  $l_2$  de sus extremos.

- Calcule el campo eléctrico en  $P$
- Vea que sucede cuando  $r$  es mucho mayor que  $l_1$  y  $l_2$
- Haga una aproximación para los casos en que  $r$  es mucho menor que  $l_1$  y  $l_2$  ¿Qué ocurre cuando  $l_1$  y  $l_2$  tienden a infinito?

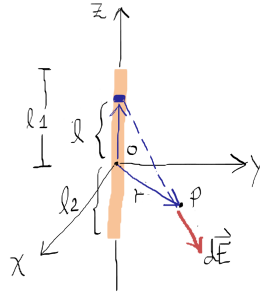


### Solución

- Tomemos un elemento diferencial de longitud, a una distancia  $l$  del origen. Según la ley de

Coulomb, este elemento diferencial de carga crea un campo eléctrico en  $P$  que está dado por:

$$d\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(\vec{x} - \vec{x}')}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|^3}$$



En este caso, tenemos  $\vec{x} = r\hat{r}$ , donde  $\hat{r}$  es el vector radial en coordenadas cilíndricas que apunta desde el origen hasta el punto  $P$ . Además  $\vec{x}' = l\hat{k}$ , luego:

$$\vec{x} - \vec{x}' = r\hat{r} - l\hat{k} \quad \|\vec{x} - \vec{x}'\| = \sqrt{r^2 + l^2}$$

De esta forma, la contribución del elemento diferencial al campo en  $P$  es:

$$d\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl(r\hat{r} - l\hat{k})}{(r^2 + l^2)^{3/2}}$$

Utilizando el principio de superposición, el campo total en  $P$  será la suma de todas las contribuciones infinitesimales de la distribución, esto es

$$\vec{E}(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( r\hat{r} \int_{-l_2}^{l_1} \frac{dl}{(l^2 + r^2)^{3/2}} - \hat{k} \int_{-l_2}^{l_1} \frac{l dl}{(l^2 + r^2)^{3/2}} \right)$$

Ahora, la integral:

$$\int \frac{l dl}{(r^2 + l^2)^{3/2}}$$

se resuelve con la sustitución  $u = r^2 + l^2$ , luego  $du = 2l dl$ , con esto:

$$\int \frac{l dl}{(r^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^{3/2}} = -\frac{1}{u^{1/2}} = -\frac{1}{\sqrt{r^2 + l^2}}$$

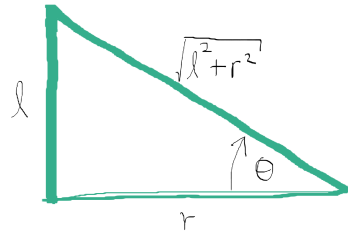
y la integral:

$$\int \frac{dl}{(r^2 + l^2)^{3/2}}$$

se resuelve con la sustitución trigonométrica  $l = r \tan \vartheta$ , así  $dl = r \sec^2 \vartheta d\vartheta$

$$\int \frac{l dl}{(r^2 + l^2)^{3/2}} = \int \frac{d\vartheta r \sec^2 \vartheta}{(r^2 + r^2 \tan^2 \vartheta)^{3/2}} = \int \frac{d\vartheta r \sec^2 \vartheta}{r^3 \sec^3 \vartheta}$$

$$\int \frac{l dl}{(r^2 + l^2)^{3/2}} = \int \frac{d\vartheta}{r^2 \sec \vartheta} = \frac{1}{r^2} \sin \vartheta$$



Ahora, de la figura vemos que  $\sin \vartheta = \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2}}$ , luego:

$$\int \frac{l dl}{(r^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{1}{r^2} \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2}}$$

Con esto, el campo total en  $P$  es:

$$\vec{E}(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( r\hat{r} \frac{1}{r^2} \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2}} \Big|_{-l_2}^{l_1} + \hat{k} \frac{1}{\sqrt{r^2 + l^2}} \Big|_{-l_2}^{l_1} \right)$$

$$\vec{E}(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \hat{r} \left( \frac{l_1}{\sqrt{r^2 + l_1^2}} + \frac{l_2}{\sqrt{r^2 + l_2^2}} \right) + \hat{k} \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + l_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + l_2^2}} \right) \right]$$

b) En el límite cuando  $r \gg l_1$  y  $r \gg l_2$ , se tiene que (a orden cero):

$$\sqrt{r^2 + l_1^2} \approx \sqrt{r^2 + l_2^2} \approx r$$

Luego el campo queda:

$$\vec{E}(P) \approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} \hat{r} \left( \frac{l_1}{r} + \frac{l_2}{r} \right) + \hat{k} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \right) \right) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{l_1 + l_2}{r} \hat{r}$$

pero  $\lambda(l_1 + l_2)$  corresponde a la carga total contenida en la distribución, digamos,  $Q$ , luego el campo se escribe

$$\vec{E} \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

que es el campo de una carga puntual.

c) Ahora, en el límite cuando  $l_1 \gg r$  y  $l_2 \gg r$ , se tiene que:

$$\sqrt{r^2 + l_1^2} \approx l_1$$

$$\sqrt{r^2 + l_2^2} \approx l_2$$

y el campo queda :

$$\vec{E}(P) \approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2}{r} \hat{r} + \hat{k} \left( \frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2} \right) \right]$$

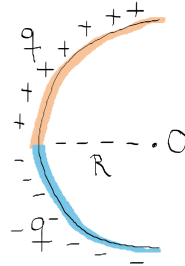
y si  $l_1 \rightarrow \infty$ ,  $l_2 \rightarrow \infty$ , se tiene:

$$\vec{E}(P) \approx \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

que es el campo eléctrico generado por un alambre infinito de carga.

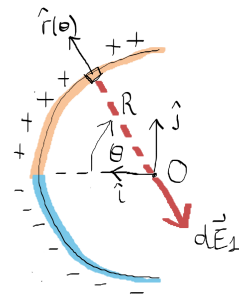
■

■ **Ejemplo 1.10 — Varilla asimétrica.** Una varilla no conductora está doblada en un semicírculo de radio  $R$ . Una carga  $+q$  está uniformemente distribuida a lo largo de la varilla en la mitad superior y una carga  $-q$  está uniformemente distribuida a lo largo de la varilla en la mitad inferior. Determine la magnitud y dirección del campo eléctrico en el centro del semicírculo.



### Solución

Obtendremos primero el campo eléctrico generado por el segmento superior (de carga total  $q$ ). Para ello definimos los ejes como se muestra a continuación, siendo  $\vec{x} = 0$  el origen y  $\vec{x}' = R\hat{r}(\vartheta)$  será el vector que recorre la distribución de carga.



El vector  $\vec{x}' = R\hat{r}(\vartheta)$ , con  $\vartheta \in \{0, \pi/4\}$ , designa un elemento infinitesimal de longitud de arco, cuya carga es

$$dq = dl\lambda = R d\vartheta \lambda = d\vartheta \frac{2q}{\pi}$$

donde se ha utilizado una densidad homogénea de carga igual a  $\lambda = \frac{q}{\pi R/2}$ . Este diferencial de carga genera un campo eléctrico en  $\vec{x} = 0$  dado por

$$d\vec{E}_1(0) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|^3} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{-R\hat{r}(\vartheta)}{R^3} = -\frac{2qd\vartheta}{4\pi^2\epsilon_0} \frac{\hat{r}(\vartheta)}{R^2}$$

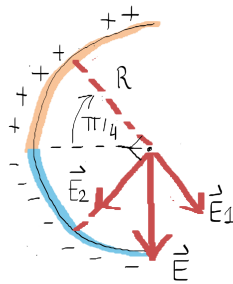
De esta forma, el campo eléctrico total debido a la parte superior se obtiene utilizando el principio de superposición

$$\vec{E}_1(0) = -\frac{q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2} \int_0^{\pi/4} d\vartheta \hat{r}(\vartheta) = -\frac{q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2} \int_0^{\pi/4} (\cos \vartheta \hat{i} + \sin \vartheta \hat{j}) = -\frac{q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2} (\hat{i} + \hat{j})$$

El cual forma un ángulo de  $\pi/4$  con el eje horizontal. El campo generado por el segmento de carga  $-q$  puede ser obtenido utilizando simples argumentos de simetría. El campo  $\vec{E}_2$  generado

en el origen sería idéntico a  $\vec{E}_1$  excepto por la inversión del signo de la componente según  $\hat{j}$  y de la carga. Es decir

$$\vec{E}_2(0) = \frac{q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2} (\hat{i} - \hat{j})$$

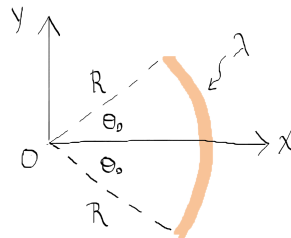


Sumando ambos campos:

$$\vec{E}(0) = -\frac{q}{\pi^2\epsilon_0 R^2} \hat{j}$$

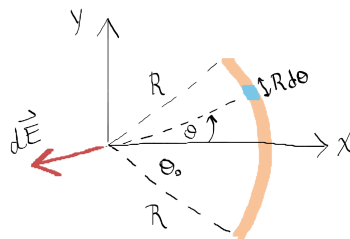
■

■ **Ejemplo 1.11 — Arco de círculo.** Una barra delgada con densidad de carga uniforme  $\lambda$  se dobla con la forma de un arco de círculo de radio  $R$ . El arco sube un ángulo total  $2\vartheta_0$ , simétrico con respecto al eje  $x$ , como se muestra en la figura. ¿Cuál es el campo eléctrico  $\vec{E}$  en el origen  $O$ ? Vea que sucede cuando  $\vartheta_0 \rightarrow \pi$  y cuando  $\sin \vartheta_0 \ll 1$ .



### Solución

Considere un elemento diferencial de longitud  $dl = R d\vartheta$ , que forma un ángulo  $\vartheta$  con respecto al eje  $x$ .



La cantidad de carga que contiene este elemento es  $dq = \lambda dl = \lambda R d\theta$ .

Su contribución al campo eléctrico en O es

$$d\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \hat{r}(\vartheta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} (-\cos\vartheta \hat{i} - \sin\vartheta \hat{j}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\vartheta}{R} (-\cos\vartheta \hat{i} - \sin\vartheta \hat{j})$$

Integrando  $\vartheta$  entre  $-\vartheta_0$  y  $\vartheta_0$ , se obtiene

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} d\vartheta (-\cos\vartheta \hat{i} - \sin\vartheta \hat{j})$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} (-\sin\vartheta \hat{i} + \cos\vartheta \hat{j}) \Big|_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda \sin\vartheta_0}{R} \hat{i}$$

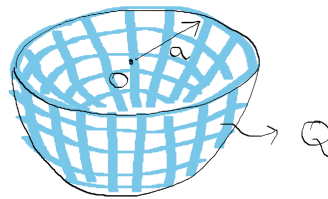
Vemos que el campo eléctrico solo tiene componente en el eje  $x$ , lo que concuerda con la simetría del problema. Si tomamos el límite cuando  $\vartheta_0 \rightarrow \pi$ , el arco se transforma en un anillo circular. Ya que  $\sin\pi \rightarrow 0$ , la ecuación anterior implica que el campo eléctrico en el centro de un anillo de carga es nulo, lo cual es esperable por argumentos de simetría. (Comparar además con el campo de un anillo de carga calculado en el ejemplo 1.6 para  $z = 0$ ). Por otro lado, para ángulos muy pequeños,  $\sin\vartheta_0 \approx \vartheta_0$ , recuperamos el caso de una carga puntual

$$\vec{E} \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda \vartheta_0}{R} \hat{i} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda \vartheta_0 R}{R^2} \hat{i} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{i}$$

Donde la carga total del arco es  $Q = \lambda l = \lambda(2R\vartheta_0)$

■

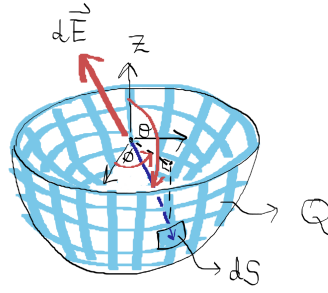
■ **Ejemplo 1.12 — Hemisferio cargado.** Un recipiente hemisférico de radio  $a$  tiene una carga total  $Q$  repartida uniformemente en su superficie. Encuentre el campo eléctrico en el centro de curvatura.



### Solución

Tomamos como origen el centro de curvatura de la semiesfera. A partir de esto podemos determinar la contribución de un elemento diferencial de carga en la superficie al campo eléctrico en el eje  $\hat{k}$  que pasa por el centro de curvatura. Por simetría, se puede anticipar que el campo total solo tendrá componente en  $\hat{k}$ . Un elemento diferencial de superficie sobre la esfera está dado por

$$ds = a^2 \sin\vartheta d\vartheta d\phi$$



y como la carga está distribuída uniformemente, la densidad superficial es simplemente  $\sigma = \frac{Q}{2\pi a^2}$ , luego

$$d\vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q}{8\pi^2 a^2 \epsilon_0} \frac{(\vec{x} - a\hat{r}(\vartheta, \phi))}{\|\vec{x} - a\hat{r}(\vartheta, \phi)\|^3} a^2 \sin \vartheta d\vartheta d\phi$$

Con esto, podemos determinar el campo total integrando sobre toda la superficie

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q}{8\pi^2 \epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\pi/2}^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta \frac{(\vec{x} - a\hat{r}(\vartheta, \phi))}{\|\vec{x} - a\hat{r}(\vartheta, \phi)\|^3}$$

Evaluando en  $\vec{x} = \vec{0}$  obtenemos el campo en el centro de curvatura

$$\vec{E}(0) = \frac{Q}{8\pi^2 \epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{-a\hat{r}(\vartheta, \phi)'}{a^3} \sin \vartheta d\vartheta$$

Además  $\hat{r}(\vartheta, \phi) = \cos \vartheta \hat{k} + \sin \vartheta \cos \phi \hat{i} + \sin \vartheta \sin \phi \hat{j}$ . Por el argumento de simetría, solo interesa la componente según  $\hat{k}$ . Con esto

$$\vec{E}(0) = -\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 a^2} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \hat{k} = \frac{Q}{8\epsilon_0 \pi a^2} \int_{\pi/2}^{\pi} -\sin(2\vartheta) d\vartheta \hat{k}$$

Finalmente el campo en el centro de curvatura es

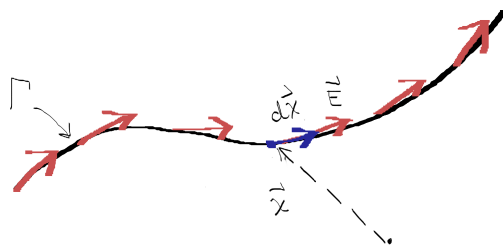
$$\vec{E}(0) = \frac{Q}{8\pi \epsilon_0 a^2} \hat{k}$$

■

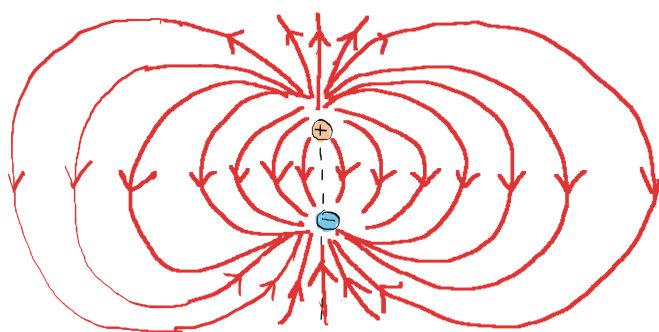


### 1.5.2 Líneas de campo

Una línea de campo es una curva  $\Gamma$  tal que en todo punto  $\vec{x} \in \Gamma$  ésta es paralela al campo eléctrico. Esto es,  $\vec{E}(\vec{x}) // d\vec{x}$ .



Las líneas de campo no se cierran nunca sobre ellas ni tampoco se intersectan entre ellas. En general, ellas parten ortogonalmente desde las cargas positivas y llegan perpendicularmente a las cargas negativas. La figura siguiente muestra las líneas de campo que generan dos cargas de signo contrario separadas por una cierta distancia  $a$ . Esta configuración, llamada dipolo, es muy importante y será estudiada en detalle más adelante en la sección 3.7.1.



### 1.5.3 Delta de Dirac, el problema de tratar con cargas puntuales

Cuando se tiene una distribución continua de carga sobre un conjunto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ , uno puede definir una función  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que representa la densidad de carga por unidad de volumen en todo punto de  $\Omega$ . Esta densidad permite calcular el campo eléctrico en todo el espacio por medio de la integral de Coulomb (1.3).

Por otro lado, en física es recurrente acudir a la noción de objeto puntual para tratar con partículas fundamentales como el electrón, que no ocupan un volumen en el espacio. Nuestro objetivo es poder generalizar la integral de Coulomb para el caso en que se tiene una carga puntual  $q$  en  $\vec{x}_0$ . La idea es asignarle entonces una densidad de una carga  $\rho$ . Suponiendo que esta densidad de carga existe, ella debe cumplir con lo siguiente:

$$\rho(\vec{x}, \vec{x}_0) = 0 \quad \text{si } \vec{x} \neq \vec{x}_0$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \rho(\vec{x}, \vec{x}_0) = q \quad \text{carga total igual a } q$$

Además, utilizando la integral de coulomb (1.3), uno debería obtener el campo eléctrico de una carga puntual:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \rho(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^3}$$

Vemos que el rol de  $\rho(\vec{x}, \vec{x}_0)$  en esta integral equivale a extraer el valor del integrando en  $\vec{x}' = \vec{x}_0$ . ¿Existirá alguna función con esta propiedad?. Para responder a esta pregunta, abordemos primero el problema a una dimensión, y sin perder generalidad consideremos una carga unitaria en el origen ( $x_0 = 0$ ). La idea es entonces encontrar una función  $\delta$  que satisfice:

$$\delta(x) = 0 \quad \forall x \neq 0 \quad (1.4)$$

y que de forma general, para toda función  $\varphi$  regular, la integración de  $\delta\varphi$  sobre  $x$  extraiga únicamente el valor de  $\varphi$  en  $x = 0$ :

$$\int_{\mathbb{R}} dx \delta(x) \varphi(x) = \varphi(0) \quad (1.5)$$

en particular, para  $\varphi = 1$  se obtiene la carga total (igual a uno):

$$\int_{\mathbb{R}} dx \delta(x) = 1 \quad (1.6)$$

En caso de existir, la función  $q\delta(x - x_0)$  podría describir la densidad unidimensional de una carga  $q$  ubicada en  $x_0$ . Sin embargo, semejante función **no** existe. En efecto, si una función es cero salvo en un punto, su integral es necesariamente nula, y la propiedad 1.5 es imposible de cumplir en general. La descripción matemática adecuada para tratar objetos puntuales corresponde a utilizar la  $\delta$  de Dirac, que no es una función sino que una **distribución de Schwartz**, en honor a Laurent Schwartz (1915-2002), matemático francés autor de la teoría de distribuciones (1950)).

**Definición 1.5.2 — Delta de Dirac.** Sea un espacio vectorial  $S$  de funciones suficientemente regulares (ver apéndice 7.1 para una definición mas precisa de  $S$ ). Se define la  $\delta$  de Dirac como el funcional lineal sobre  $S$  tal que:

$$(\delta, \varphi) \equiv \varphi(0) \quad \forall \varphi \in S \quad (1.7)$$

Vemos entonces que la acción de la  $\delta$  sobre  $\varphi$  corresponde simplemente a tomar su valor en  $x = 0$ .

### Funciones que tienden a $\delta$

Si  $f$  es una función integrable, entonces es posible definir un funcional lineal sobre  $S$  a partir de  $f$  tal que:

$$(f, \varphi) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in S \quad (1.8)$$

A continuación veremos que existen sucesiones de funciones cuyos funcionales, definidos por 1.8, convergen a la delta de Dirac. Para ilustrar esto, consideremos por ejemplo la siguiente sucesión de funciones:

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n/2 & |x| < 1/n \\ 0 & |x| > 1/n \end{cases} \quad (1.9)$$

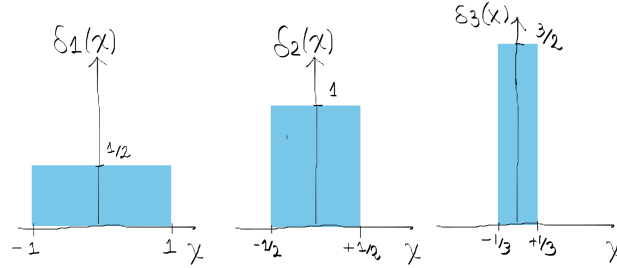


Figura 1.7: Primeras 3 funciones dadas por la sucesión  $\delta_n(x)$

Para todo  $n$ , el área bajo la curva de  $\delta_n$  es igual a 1. Notar entonces que a medida que aumenta  $n$ , la función  $\delta_n$  describe un rectángulo cada vez más concentrado (y de mayor amplitud) en torno al origen. Esta sucesión tiende a cero para todo  $x \neq 0$ , es decir, converge puntualmente a la función nula salvo en  $x = 0$ . Utilizando el lema de Fatou, es fácil ver que entonces  $\int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) dx = 0$ , lo que no es acorde con (1.5). Sin embargo, para toda función  $\varphi$  suficientemente regular, se tiene que el funcional  $\delta_n$  cumple:

$$(\delta_n, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} dx \varphi(x) \delta_n(x) = \frac{n}{2} \int_{-1/n}^{1/n} dx \varphi(x) = \varphi(\vartheta_n/n)$$

con  $-1 \leq \vartheta_n \leq 1$  (teorema del valor intermedio). Tomando el límite cuando  $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\delta_n, \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\vartheta_n/n) = \varphi(0) = (\delta, \varphi)$$

Luego, la sucesión de funcionales  $\delta_n$  tiende a la delta de Dirac en el sentido de las distribuciones (ver 7.1).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \delta$$

En resumen, la sucesión  $\delta_n$  converge punto a punto a una función que se anula en todo  $\mathbb{R}$  salvo en el origen, pero cuya integral tiende a un límite distinto de cero (este es un clásico ejemplo en que no es permitido intercambiar límite con integral). Existen distintas sucesiones que convergen a la  $\delta$ , por ejemplo una sucesión de gaussianas de la forma:

$$h_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}$$

converge igualmente a la delta ya que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (h_n, \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} h_n(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi$  regular.

#### Nota

De ahora en adelante, utilizaremos recurrentemente el siguiente abuso de notación

$$(\delta, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} dx \delta(x) \varphi(x) = \varphi(0) \quad (1.10)$$

donde la integral en 1.10 no está definida, puesto que  $\delta$  no es una función. Esta integral representa en realidad un límite de integrales de la forma  $\int_{\mathbb{R}} dx \delta(x) \varphi(x) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} dx \delta_n(x) \varphi(x) = \varphi(0)$ , donde  $\delta_n$  es cualquier sucesión de funciones que converge a la  $\delta$  en el sentido de las distribuciones. Por ejemplo, por abuso de notación, escribimos:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \delta(\vec{x}') \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|^3} d^3x' = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \quad (1.11)$$

aunque no exista ninguna función  $\delta(\vec{x})$  que cumpla dicha igualdad.

### 1.5.4 Propiedades de la $\delta$

A continuación se presentan las propiedades principales de la distribución de Dirac con la notación dada por 1.10. Cabe recordar que ésta no es una función, y por lo tanto ni su integral ni su derivada están definidas en el sentido que uno utiliza para las funciones. Varias de estas propiedades y el significado real de las notaciones son justificadas en el marco de la teoría de distribuciones (apéndice 7.1).

1. Se tiene, para toda función  $\varphi$  suficientemente regular

$$\int_{\mathbb{R}} dx \delta(x) \varphi(x) = \varphi(0)$$

2. En particular,

$$\int_{\mathbb{R}} dx \delta(x) = 1$$

3. Se define la distribución  $\delta_{x_0}$  como aquella que asocia a toda función  $\varphi$  regular su valor en  $x_0$ , y escribimos

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \delta(x - x_0) dx \equiv (\delta_{x_0}, \varphi) = \varphi(x_0) \quad (1.12)$$

4. La generalización a más dimensiones es inmediata. Por ejemplo en  $\mathbb{R}^3$

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$$

y entonces

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \varphi(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) = \varphi(\vec{x}_0)$$

5. Se puede definir el producto de la  $\delta$  por una función  $f$ , obteniendo

$$\delta(x) f(x) = f(0) \delta(x)$$

6. Finalmente, una de las ecuaciones **fundamentales** de la electrostática sólo tiene sentido en el marco de las distribuciones. Su demostración se encuentra en el apéndice (7.3) y está dada por

$$\vec{\nabla}^2 \left( \frac{1}{|\vec{x}|} \right) = -4\pi \delta(\vec{x}) \quad (1.13)$$

**Nota**

La igualdad 7.6 significa que, para toda función  $\varphi$  regular

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \varphi(\vec{x}) \vec{\nabla}^2 \left( \frac{1}{|\vec{x}|} \right) d^3x = -4\pi\varphi(0) \quad (1.14)$$

■ **Ejemplo 1.13** Muestre que una distribución discreta de cargas  $q_i$ , ubicadas en los puntos  $\vec{x}_i$ , con  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , es consistente con una distribución volumétrica de carga dada por

$$\rho(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$$

**Solución**

Para ver que la distribución de carga se puede escribir de esta forma, se debe verificar que el campo eléctrico que genera es el correcto. En efecto, utilizando la fórmula general 1.3

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|^3}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} d^3x' \left[ \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \right] \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|^3}$$

Si la distribución es finita podemos intercambiar la integral con la suma

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \iiint_{\mathbb{R}^3} d^3x' \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|^3} \\ \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{\|\vec{x} - \vec{x}_i\|^3} \end{aligned}$$

que es exactamente el campo generado por la distribución discreta de carga, de acuerdo al principio de superposición.

■

**1.5.5 Comportamiento asintótico del campo eléctrico**

A partir de la integral de Coulomb (1.3), vemos que el módulo del campo eléctrico satisface:

$$\|\vec{E}(\vec{x})\| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\| \iiint_{\mathbb{R}^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')(\vec{x} - \vec{x}')}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|^3} \right\| \leq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} d^3x' \frac{|\rho(\vec{x}')|}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|^2}$$

de forma que:

$$\|\vec{x}\|^2 \|\vec{E}(\vec{x})\| \leq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} d^3x' |\rho(\vec{x}')| \frac{\|\vec{x}\|^2}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|^2}$$

Luego:

$$\lim_{\|\vec{x}\| \rightarrow \infty} \|\vec{x}\|^2 \|\vec{E}(\vec{x})\| \leq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} d^3x' |\rho(\vec{x}')|$$

Vemos entonces que si  $\iiint_{\mathbb{R}^3} d^3x' |\rho(\vec{x}')| < \infty$  (y entonces  $\rho \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)$ , el espacio vectorial de las funciones de módulo integrable sobre  $\mathbb{R}^3$ ), el campo eléctrico  $\vec{E}$  definido mediante la integral de Coulomb (1.3) decae igual o más rápido que  $1/\|\vec{x}\|^2$  en el infinito.

$$\rho \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow \lim_{\|\vec{x}\| \rightarrow \infty} \|\vec{x}\|^2 \|\vec{E}(\vec{x})\| < \infty$$

Hemos vistos ejemplos en los que  $\rho$  no es integrable: la línea de carga infinita del ejemplo 1.9 o el plano infinito del ejemplo 1.7). En ambos casos, el campo eléctrico decae más lento que  $1/r^2$  en el infinito (el campo de la línea decae como  $1/r$ , mientras que el campo de un plano infinito es constante en el espacio). Estos ejemplos son casos límites y deben ser considerados como una aproximación para puntos suficientemente cerca de una línea finita o de un plano finito.

## 1.6 Resumen y fórmulas esenciales

- Las cargas eléctricas generan un campo eléctrico  $\vec{E}$ , el cual es un campo vectorial definido sobre todo el espacio  $\vec{E} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Físicamente,  $\vec{E}(\vec{x})$  representa la fuerza por unidad de carga que sentiría una carga al ser colocada en la posición  $\vec{x}$ .
- El campo eléctrico generado por una densidad de carga  $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  está dado por la integral de Coulomb (Ecuación (1.3))

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|^3} (\vec{x} - \vec{x}')$$

- Esta ecuación es válida para cuando  $\rho$  representa la densidad de carga de un medio continuo, y también en el caso donde se tienen cargas puntuales. Gracias a la distribución de Dirac, la densidad de carga asociada a una carga puntual  $q$  ubicada en  $\vec{x}_0$  se puede escribir como una densidad de volumen  $\rho(\vec{x}) = q\delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$ . De esta forma, se obtiene el campo eléctrico de una carga puntual (ley de Coulomb):

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} d^3x' q\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^3}$$

- La fuerza que experimenta una carga  $q$  en presencia de un campo eléctrico  $\vec{E}$  es

$$\vec{F}_q = q\vec{E}(\vec{x})$$